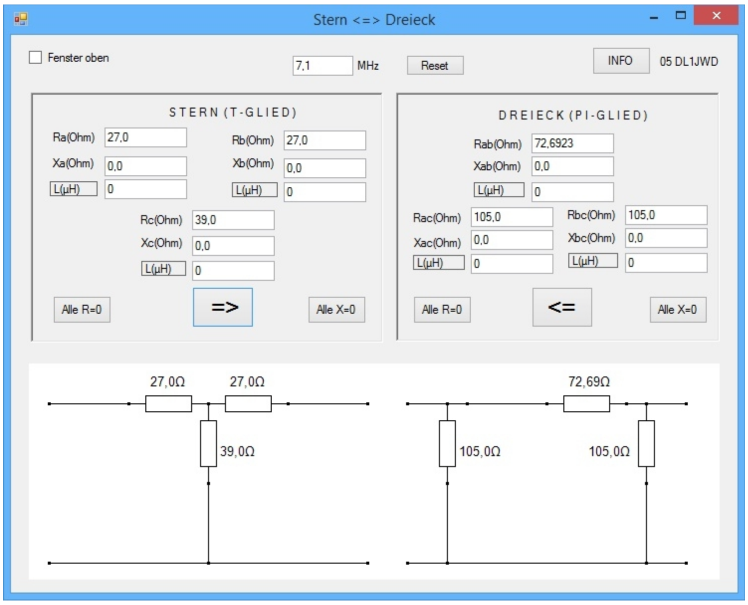
Dr.-Ing.habil. Walter Doberenz DL1JWD

Stern-Dreieck-Transformation von Impedanzen

Eine T-Schaltung (Stern) kann durch eine Pi-Schaltung (Dreieck) mit gleichem Klemmenverhalten ersetzt werden und umgekehrt (siehe Stern-Dreieck).
Deutlich komplizierter wird die Rechnerei, wenn es sich nicht um ohm'sche, sondern um komplexe Widerstände (Impedanzen) handelt. Diese können nach der Transformation auch negative Realteile haben, sie sind dann technisch nicht realisierbar.
Das einzigartige Tool bietet breiten Raum für Experimente und verwendet die im Amateurfunk gängigen Maßeinheiten MHz, µH und pF.

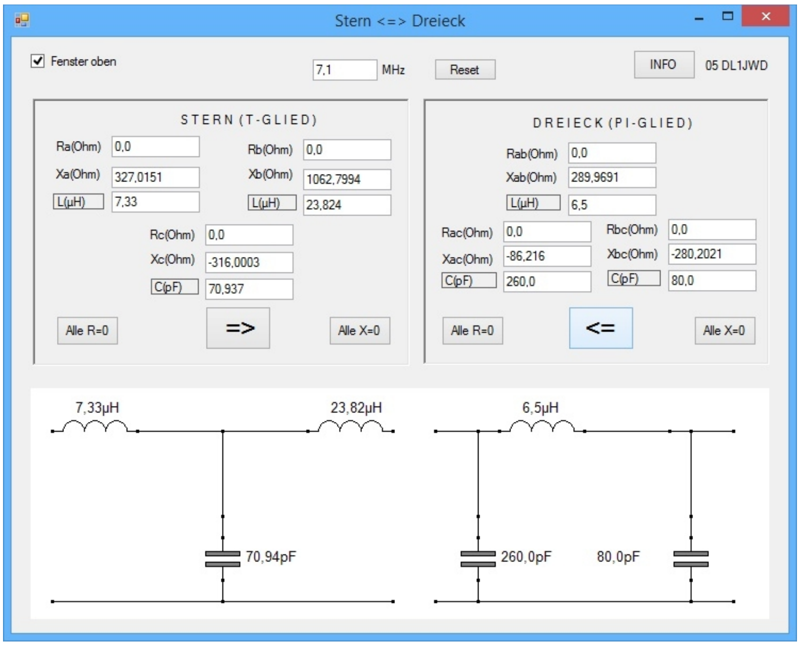
Beispiel 1:
Ein Dämpfungsglied (-9,72dB, 50Ohm-System) in T-Schaltung besteht aus den Widerständen Ra = 27Ohm, Rb = 27Ohm und Rc = 39Ohm. Wie sieht die äquivalente Pi-Schaltung aus?

Da alle Widerstände frequenzunabhängig sind, ist der eingetragene Wert für die Frequenz egal. Klicken Sie auf der linken Seite den Button "Alle X=0", da es sich um ein reines Widerstandsnetzwerk handelt. Füllen Sie die Eingabefelder für Ra, Rb und Rc aus und klicken Sie den Button "=>", um die Transformation auszuführen.



Beispiel 2:
Ein zur Antennenanpassung bei 7,1MHz verwendetes Collinsfilter mit C1 = 260pF, C2 = 80pF und L =6,5µH soll in die äquivalente T-Schaltung transformiert werden.

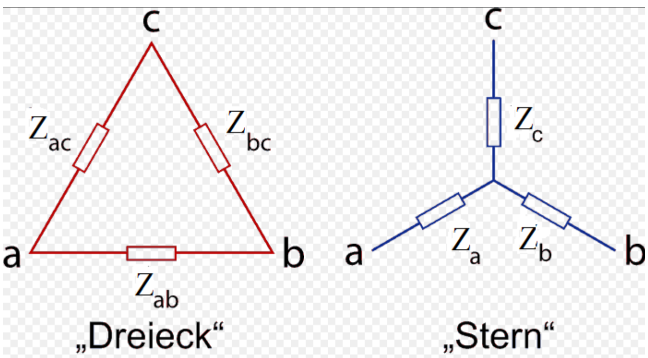
Nach Eingabe der Frequenz tragen Sie auf der rechten Hälfte die Werte für L und C der Dreieckschaltung ein.
Um zwischen Induktivität und Kapazität wechseln zu können, müssen Sie zunächst auf die kleinen umrahmten Felder "L(µH)" bzw. "C(pF)" klicken.
Abschließend klicken Sie die Schaltfläche "<=" um die Transformation in die T-Schaltung auszuführen.



Bislang haben wir die Verluste in den Bauelementen L und C vernachlässigt.
Das wollen wir jetzt ändern, indem wir der Spule des Collinsfilters einen Reihenwiderstand Rab = 3Ohm zuweisen, was einer Spulengüte von ca. 100 entspricht.
Sie werden leider feststellen, dass diesmal keine exakt äquivalente T-Schaltung existiert, da deren Widerstand Rc einen negativen Wert bekommen müsste.

Theorie

Die Stern-Dreieck- oder Dreieck-Stern-Transformation wird im englischen als Delta-Star-Transformation bzw. als Kennelly-Theorem nach Arthur Edwin Kennelly bezeichnet.
Durch entsprechende Anwendung beider Transformationen und der Regeln für Parallel- und Reihenschaltung von Impedanzen kann die Analyse von Wechselstromschaltungen (hierin ist der Sonderfall reiner Widerstandsnetzwerke natürlich inbegriffen) vereinfacht werden, z.B. ist eine Stern-Dreieck-Transformation gleichbedeutend mit der Elimination des inneren Knotens der Schaltung.
Die Stern-Dreieck-Transformation ist identisch mit der Pi-T-Transformation zwischen der π-Schaltung und der T-Schaltung.



In beiden Schaltungen müssen die zwischen den Anschlüssen a, b und c gemessenen Impedanzen exakt gleichgroß sein. Aus dieser Bedingung resultieren die folgenden Umrechnungsformeln, deren Herleitung allerdings nur denjenigen zu empfehlen ist, die sich mit komplexen Rechenoperationen (Phasoren) einigermaßen gut auskennen:

Stern => Dreieck:

$$Z_{ab} = \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c}{Z_c}$$
$$Z_{ac} = \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c}{Z_b}$$
$$Z_{bc} = \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c}{Z_a}$$

Dreieck => Stern:

$$Z_a = \frac{Z_{ac} Z_{ab}}{Z_{ac} + Z_{ab} + Z_{bc}}$$
$$Z_b = \frac{Z_{ab} Z_{bc}}{Z_{ac} + Z_{ab} + Z_{bc}}$$
$$Z_c = \frac{Z_{ac} Z_{bc}}{Z_{ac} + Z_{ab} + Z_{bc}}$$

Es gilt für die Impedanzen:
Za = Ra + jXa; **Zb** = Rb + jXb; **Zc** = Rc + jXc
Zab = Rab + jXab; **Zac** = Rac + jXac; **Zbc** = Rbc + jXbc

Handelt es sich um reine Widerstandsnetzwerke, so sind alle Blindanteile (alle X) null, was natürlich zu einer erheblichen Vereinfachung der Umrechnung führt.

siehe auch: https://elektroniktutor.de/analogtechnik/stdrumw.html